1. **Моделирање и модели, врсте модела.**

Моделирање изражава нашу способност да мислимо и замишљамо, да користимо симболе и језике, да комуницирамо, да вршимо генерализације на основу искуства, да се суочавамо са неочекиваним. Оно нам омогућава да уочавамо обрасце, да процењујемо и предвиђамо, да управљамо процесима и објектима, да излажемо значење и сврху. У најширем смислу, моделирање представља исплативо (у смислу трошкова) коришћење нечега (модел) уместо нечега другог (реални систем) са циљем да се дође до одређеног сазнања. Резултат моделирања је модел. Модел је апстракција реалности у смислу да он не може да обухвати све њене аспекте. Модел је упрошћена и идеализована слика реалности. Он нам омогућава да се суочимо са реалним светом (системом) на поједностављен начин, избегавајући његову комплексност и иреверзибилност, као и све опасности (у најширем смислу те речи) које могу проистећи из експеримента над самим реалним системом.
Другим речима, модел је описреалног система са свим оним карактеристикама које су релевантнеиз нашег угла посматрања. То заправо значи да у процесу моделирања морамо извршити избор између оних елемената и карактеристика система које су од значаја за наше истраживање и које ће бити обухваћене моделом и преосталих, за нас ирелевантних, које наш модел неће садржати. Модел не садржи само објекте и атрибуте реалног система, већ и одређене претпоставке о условима његове валидности. Његов је циљ да уобличи на видљив, често
формалан начин, оно што је суштинско за разумевање неког аспекта његове структуре или понашања. Ниво апстракције у процесу моделирања утиче на валидност модела, односно на успешност представљања реалног система моделом. Сувише сложени или савршени модели који имају
способност да за исти скуп улазних величина производе исте излазне вредности као и реални системи, чак иако су оствариви, по правилу су прескупи и неадекватни за експериментисање. С друге стране, сувише поједностављени модели не одсликавају на прави начин посматрани систем, а резултати који се добијају њиховом применом могу да буду неадекватни и погрешни.

Врсте модела

За представљање система користе се различити модели, као што су:

- ментални (мисаони)
- вербални
- структурни или концептуални
- физички
- аналогни
- математички
- симулациони
- рачунарски и разни други модели.

Често их делимо и на:

- материјалне (модел хемијске структуре молекула или модел авиона)
- симболичке моделе (математички,концептуални, рачунарски, симулациони идр).

Ментални модели су структуре које људски мозак непрекидно конструише како би био у стању да повеже низ чињеница са којима се човек сусреће, а потом на основу тога делује.Такви модели омогућују, на пример, разумевање физичког света, комуникацију међу људима и планирање акција. Из овог модела створили су се знатно комлекснији модели као последица човекове потребе да објани коплексније појаве у природи. У
менталним процесима, различити концепти које јединка поседује постављају се у различите нове односе. Концепт који јединка носи нису реалан свет, а закључци које ствара на основу њих су закључци формулисани помоћу модела.

Вербални модели су директна последица менталних модела и представљају њихов израз у говорном језику, а уобичајено се представљају у писаном облику. Вербални модели спадају у класу неформалних модела.

Физички модели представљају умањене моделе реалног система, који се понашају на исти начин као и њихови оригинали. Углавном се праве на основу теорије сличности или, у бољем случају, на основу физичких закона сличности.

Математички модел је из класе апстрактних. Код формулисања математичког модела полази се од вербалног модела који се трансформисањем доводи у стање које се може описати математичким језиком. Ова класа модела има широку примену, нарочито у науци и инжењерским дисциплинама. Такодје уколико су везе између објеката модела описане математичким (нумеричким) релацијама, тада се ради о математичким моделима.

Аналогни модел - Између два физичка модела који имају исте математичке моделе, каже се да постоји математичка аналогија. Истоветност математичких модела двају објеката пружа могућност да један од физичких објеката буде коришћен за анализу математичког модела другог објекта. Физички објекат који се користи за анализу математичког модела другог објекта, а са којим има исти или сличан математички модел, назива се аналогни модел. Према томе, између физичког објекта који се испитује и аналогног модела постоји математичка аналогија.

Концептуални модели се стварају на основу представе о структури и логици рада система или проблема који се моделира и приказују се у облику чије је значење прецизно дефинисано (на пример, дијаграми са тачно дефинисаним симболима). Њихова посебна важност проистиче из чињенице да они представљају основу за израду рачунарских модела. Ови се модели често називају и структурни, пошто у графичком облику указују на структуру (релативно стабилан однос елемената) посматраног система. Такав приказ омогућује да се модели визуализују и на тај начин постају згодно средство за комуникацију међу људима који са њима раде. Поред тога, графички приказ модела обезбеђује релативно једноставан приказ сложених система и несумњиво значи важан корак ка бољем разумевању ситема који се моделира.

Рачунарски (симулациони) модели су приказ концептуалних модела у облику програма за рачунар. У том облику модели постају средство којим се може ефикасно анализирати рад модела у различитим спољним условима и са различитим унутрашњим параметрима и тако добити увид у понашање система који модел описује. Као средство за изражавање, рачунарски модели користе програмске језике и стога су блиско везани за развој рачунарских наука.

2. **Неформални и формални модели**

Неформални опис модела даје основне појмове о моделу и, мада се тежи његовој потпуности и прецизности, он то најчешће није. Приликом изградње неформалног описа, управо ради елиминисања поменутих недостатака, врши се подела на објекте, описне променљиве и правила интеракције објеката. Објекти су делови из којих је модел изграђен, а описне променљиве (преко вредности које узимају) описују стања у којима се објекти налазе у одређеним временским тренуцима (параметри помоћу
којих се описују константне карактеристике модела су такође укључени у описне променљиве). Такодје постоје и правила интеракције објеката која дефинишу како објекти модела утичу један на други у циљу промене њиховог стања. Треба нагласити да не постоји правило за избор објеката, описних променљивих и правила интеракције. Тај избор је препуштен ономе ко описује и изграђује модел и треба га вршити тако да се добије валидан модел. Неформални опис модела припрема се доста брзо и лако, али он најчешће није конзистентан и јасан, нарочито када су у питању сложени модели. Аномалије које се јављају приликом неформалног описа модела најчешће се могу описати на следећи начин:

- Некомплетан опис модела

- Неконзистентан опис модела
- Нејасан опис модела

Уколико модел не садржи све ситуације које могу да наступе, тада је опис некомплетан. Уколико су у опису модела за исту ситуацију предвиђена два или више правила чијом се применом добијају контрадикторне акције, тада је опис неконзистентан. И ако у једној ситуацији треба обавити две или више акција, а при томе није дефинисан њихов редослед, тада је опис модела нејасан.
Формални опис модела треба да обезбеди већу прецизност и потпуност у описивању модела, а понекад омогућава и да се формализује поступак испитивања некомплетности, неконзистентности и нејасности. Оно што је, ипак, најзначајније јесте чињеница да увођење формализама у методологију моделирања омогућава да сву своју пажњу усмеримо на оне
карактеристике објеката које су од највећег значаја за наше истраживање, дакле да користимо апстракције. Формални модел или апстрактно представљање често се спомиње као кључ успехаинтеракције човек-реални свет која се заснива на "научно-инжињерском" приступу. Важно је напоменути да овако посматрани тип интеракције човек-реални систем обухвата два различита корака. Прво, постоји увек фаза изградње модела или формализација, где се као резултат јавља модел реалног система. У другој фази, формални модел се анализира и користи, а на основу добијених резултата доносе се одлуке које обезбеђују ефикасније управљање самим реалним системом.
Неке опште препоруке за изградњу модела:

1. Граница система са околином мора бити одабрана тако да систем, односно његов модел, обухвата само феномене од интереса. Околина система моделира се тако да се не описују детаљи феномена и узрочна веза међу њима, већ се даје само њихов сажети приказ.

2. Модели не смеју бити сувише сложени нити детаљни, већ треба да садрже само релевантне елементе система – сувише сложене и детаљне моделе готово није могуће вредновати ни разумети.

3. Модел не сме сувише да поједностави проблем

4. Модел је разумно раставити на више добро дефинисаних и једноставних модула с тачно одређеном функцијом, које је лакше и изградити и проверити.

5. У развоју модела препоручује се коришћење неке од проверених метода за развој алгоритама и програма. На пример top down метода која се креће одозго на доле ☺

6. Потребна је провера логичке и квантитативне исправности модела, и то како појединачних модула тако и целог модела.

3. Моделирање и симулација

Савремено моделирање незамисливо је без рачунара. У моделирању рачунари се користе у две сврхе: у развоју модела и у извођењу прорачуна на основу створеног модела. Када реч цимулација користе рачунарски стручњаци, организатори, менаџери или статистичари, обично под симулацијом подразумевају процес изградње апстрактних модела за неке системе или подсистеме реалног света и обављање већег броја експеримената над њима. Посебно нас интересује случај када се ти експерименти одвијају на рачунару. Тада говоримо о рачунарском моделирању и симулацији. Израз моделирање и симулација изражава сложену активност која укључује три елемента: реални систем, модел и рачунар.

Под **реалним системом** подразумевамо уређен, међузависан скуп елемената који формирају јединствену целину и делују заједнички како би остварили задати циљ или функцију, без обзира да ли се ради о природном или вештачком систему, и такође, без обзира да ли тај систем у посматраном тренутку постоји или се његово постојање планира у будућности. Реални систем је извор података о понашању, а ови се подаци јављају у облику зависности X (t) , где је X било која променљива која интересује истраживача, а t је време мерено у одговарајућим јединицама. Другим речима, реални систем се може посматрати као извор података за спецификацију модела.

Модел, као и сваки реални систем, има своје објекте који се описују атрибутима или променљивим. Он је апстрактни приказ система и даје његову структуру, његове компоненте и њихово узајамно деловање. Пошто разматрамо само случај рачунарске симулације, то се под моделом може
подразумевати скуп инструкција (програм) који служи да се генерише понашање симулираног система (временска серија вредности променљивих симулираног система). Понашање модела не мора да буде у потпуности једнако понашању симулираног система, већ само у оном домену који је од интереса.

Рачунар као трећа компонента ове активности, представља уређај
способан за извршење инструкција модела, које на бази улазних
података генеришу развој модела у времену и уз различите методе и програмске алате, омогућавају погодан амбијент за стварање сложених модела и ефикасан рад над њима.

Такође је битно истаћи да је моделирање процес којим се успоставља веза између реалног система и модела, док је симулација процес који успоставља релацију између модела и рачунара.

Релација моделирања односи се на валидност модела. Валидност или ваљаност модела описује колико верно један модел представља симулирани систем. Процес утврђивања степена слагања података о реалном систему са подацима модела назива се валидација модела. Процес валидације је веома значајан, јер се на основу њега доносе одлуке о употребљивости резултата симулације, измени модела, измени података (улазних променљивих, параметара), даљем наставку симулације, понављању симулације, итд.

Релација симулације односи се на проверу да ли симулациони програм верно преноси модел на рачунар као и на тачност којом рачунар извршава инструкције модела. Пре поређења стварних података са подацима које генерише рачунар (симулатор), мора се утврдити тачност, односно коректност симулатора. Процес процене коректности симулатора назива се верификација.

Активности процеса моделирања и симулације са базом модела као централним објектом
Процесом моделирања се управља на основу циљева који се генеришу ван граница система. Сваки нови циљ иницира активност синтезе модела. При синтези модела се користи расположиво знање из базе модела и базе података. Ове базе чувају и организују прикупљене податке о реалном систему. Фазе симулације (експериментисање са моделом) и валидације следе фазу изградње модела. Валидација води новом експериментисању над реалним системом и може да захтева додатне модификације или чак одбацивање и реиницијализацију првобитног модела такође може доћи и до измене циљева или постављања нових. На крају се добијају модели који се користе за достизање циљева. Те моделе користе доносиоци одлука, а могу се меморисати у бази модела и користити касније.

Предмет моделирања и симулације

Рачунарска симулација има у основи модел система. Систем је уређај или процес који постоји или се планира као што су: производни погон, дистрибуциона мрежа, служба за хитне интервенције у болници... **Цео списак има у књизи поглавље 1.2.2**

Историјски преглед развоја симулације takođe погледати у књизи, јер мислим да нема леба да то пита....

4. **Карактетистике симулационог моделирања**

Рачунарска симулација је процес решавања проблема који се тиче предвиђања и одређивања будућих стања реалног система на основу проучавања рачунарског модела тог система. Симулациони експерименти најчешће се изводе са циљем да се прикупе одређене информације, чије би добијање путем експеримента над самим реалним системом било непрактично или сувише скупо. Те информације се касније користе у процесу одлучивања. Циљ симулације јесте тај да проучимо понашање система који симулирамо, али и да установимо како би се исти систем понашао када би на њега деловао неки други скуп променљивих околности.

За разлику од аналитичких модела који свеукупно понашање система третирају директно, симулациони модели прикупљају податке о променама стања система и излаза, фокусирајући се на понашање индивидуалних компоненти система Значај симулационих модела проистиче из чињенице да се само мали број комплексних реалних система може адекватно описати преко аналитичких једначина.
Код примене симулационог моделирања, не може се добити решење у аналитичком облику, у којем су зависне променљиве функције независних променљивих, већ се решење проблема добија експериментисањем над моделом. Симулациони експерименти дају као резултат скуп тачака, тј. вредности зависних променљивих за поједине вредности независних променљивих. Због случајног карактера променљивих модела, добија се чак и више различитих вредности зависних променљивих за исту вредност независних променљивих. Планирање и анализа симулационих експеримената захтевају статистички приступ. Симулациони модели најчешће су модели динамичких система, тј. система који се мењају у времену, с обзиром на то да су истраживачи, у већини случајева, заинтересовани за симулацију модела динамичких система. Ови су модели углавном дати у облику концептуалних (структурних) и рачунарских модела.

Процес симулације се ослања и на методе операционих истраживања и нумеричке анализе. Због постојања случајних променљивих у симулационим моделима, често се користе и приступи теорије вероватноће и статистике.

5. Потреба за симулацијом

Може се поставити питање због чега се уопште један систем (симулирани систем) замењује моделом, а затим врши симулација.
Постоји више разлога, али су најважнији следећи:

- Експеримент над реалним системом може да буде скуп или чак немогућ
- Аналитички модел нема аналитичко решење
- Систем може да буде сувише сложен да би се описао аналитички

Поред ових, навешћемо још неколико значајних разлога:

- Експериментисање са реалним системом, чак и ако се занемаре други аспекти, углавном је неисплативо или сувише сложено. Моделирање, с друге стране, може да укаже на то да ли је даље улагање у експеримент економски оправдано или не.

- Изградња модела и симулација понекад имају за циљ да се схвати функционисање постојећег система чија је структура непозната и не може јој се прићи.

- Приликом изналажења оптималног функционисања неког система, уобичајено је да се мењају разни параметри, а такаб реалан систем не постоји.

- Понекад треба симулирати услове под којима наступа разарање система. Наравно, разарање реалног система најчешће није допустиво.

- Време може да буде врло јак разлог да се прибегне симулацији. При симулацији, време се може сажети. То је значајно код симулације дуготрајних процеса. У другим случајевима, време се може знатно продужити.

- Када се врши реални експеримент, увек постоји извесна грешка при мерењу услед несавршености мерних уређаја. При симулацији ове грешке нема. Постоји само грешка "заокруживања" услед коначне дужине речи у рачунару, али се она са мало труда може учинити занемарљивом.

Када је могуће и када није могуће су само неки примери ја сам их ставио овде чисто да их прочитате, неће одузимати пуно времена...

Када је могуће експериментисати на систему?

Неки градови имају на улазним саобраћајницама инсталирану светлосну сигнализацију и могуће је експериментисати са сигналним плановима како би се систем подесио, тако да проток саобраћаја буде што већи и безбеднији у време јутарњих или поподневних шпицева.

Менаџер самопослуге може да испроба различите начине управљања набавком и расподелом задатака запосленима како би дошао до комбинације која пружа најбољу услугу и доноси највећи профит.

У рачунарској мрежи могуће је експериментисати са различитим мрежним параметрима и приоритетима за job – ове да би се сагледало како они утичу на искоришћеност уређаја и брзину рада.

Када није могуће експериментисати на систему ?

Немогуће је експериментисати са алтернативним производним програмом фабрике која не постоји (реално је објаснио неке ствари ☺)

Чак и у случају да фабрика постоји, било би веома скупо прећи на неки експериментални производни програм који можда неће дати добре резултате.

Тешко је “угурати” у банку или пошту два пута више клијената него што је уобичајено како би се испитало шта се дешава у систему када се број клијената приближи граници функционисања система.

Увођење нове неиспитане процедуре за предају пртљага на аеродрому могло би да изазове велике гужве.

Истраживање ефеката примене нових процедура код пријема хитних случајева у болницу потпуно је немогуће

6. Могућности примене симулације, предности и недостаци симулације

Навешћемо неколико ситуација када се симулација може успешно применити:

- Симулација омогућава проучавање и експериментисање које узима у обзир свеукупне интеракције сложеног система или подсистема унутар сложеног система

- Информационе и организационе промене или промене у окружењу могу се симулирати, а уједно се могу посматрати ефекти тих промена на понашање модела.

- Знање стечено у процесу изградње модела и симулације може бити од великог значаја код побољшања система који се испитује.

- Мењањем симулационих улаза и посматрањем резултујућих излаза, долазимо до важног сазнања о томе које су променљиве система најважније и како променљиве утичу једна на другу.

- Симулација се може користити и као педагошко средство са циљем да побољшава методологије аналитичких решења

- Симулација се може користити за експериментисање са новим концепцијама или политикама пре него што се изврши њихова имплементација.

- Симулација се може користити за верификацију аналитичких решења.

Предности и недостаци симулације

Као основне предности коришћења симулације наводе се следеће:

1. Једном изграђени модел може се вишеструко користити за анализу предложених планова или политика.

2. Симулационе методе могу се користити као помоћ код анализе, чак иако су улазни подаци на неки начин непотпуни.

3. Чест је случај да се симулациони подаци могу много јефтиније добити од сличних података из реалног система.

4. Симулационе методе лакше је применити него аналитичкеметоде.

5. Аналитички модели углавном захтевају више поједностављујућих претпоставки које их чине математички прилагодљивим. Симулациони модели таква ограничења немају. Са аналитичким моделима, најчешће се може израчунати једино ограничени број мерљивих карактеристика система, док код симулационих модела генерисани подаци могу да се користе за процену било које схватљиве и мерљиве карактеристике.

6. У неким случајевима, симулација је једино средство за решавање одговарајућег проблема.

7. Могуће је описати и решавати сложене динамичке проблеме са случајним променљивим који су недоступни математичком моделирању

У основне недостатке коришћења симулације убрајају се следећи:

1. Симулациони модели за дигиталне рачунаре могу бити скупи и могу захтевати значајно време за изградњу и валидацију.

2. Због статистичког карактера симулације потребно је извођење већег броја симулационих експеримената како би се добио одговарајући узорак резултата симулације, а већ и појединачно извођење експеримента може захтевати доста времена и меморије рачунара.

3. Не добијају се зависности излазних променљивих од улазних променљивих модела нити оптимална решења.

4. За исправно коришћење симулационог моделирања потребно је познавање више различитих метода и алата.

5. Вредновање модела је доста сложено и захтева додатне експерименте.

Популарност симулације

Симулација је увек иза статистичке анализе, бар по овим истраживањима...

7. Симулациони процес.

Симулациони процес је структура решавања стварних проблема помоћу симулационог моделирања. Структура симулационог процеса није строго секвенцијална, већ је могућ и повратак на претходне кораке процеса, зависно од резултата добијених у појединим фазама процеса.
Основни кораци симулационог процеса су следећи:

1. Дефиниција циља симулационе студије
Дефиниција жељеног циља и сврхе студије: проблем који треба решити (обликовање система, анализа система и сл.), границе систем/околина, ниво детаљности.

2. Идентификација система
Опис компоненти система, интеракција компоненти, начин рада, везе с околином, формални приказ система.

3. Прикупљање података о систему и њихова анализа
Прикупљање и мерење релевантних података о систему, анализа тих података (избор расподела независних случајних променљивих, оцена вредности параметара расподела).

4. Изградња симулационог модела
Стварање концептуалног модела који адекватно описује систем и омогућава решавање задатог проблема.

5. Изградња симулационог програма
Избор програмског језика или пакета и стварање симулационог програма било писањем програма, било аутоматским генерисањем програма на основу концептуалног модела.

6. Верификација симулационог програма
Тестирање симулационог програма према поставкама симулационог модела (појединачне процедуре, генерисање случајних променљивих, повезивање процедура). Уколико верификација програма није дала задовољавајуће резултате, потребан је повратак на корак 5.

7. Вредновање (валидација) симулационог модела
Испитивање да ли симулациони модел адекватно представља стварни систем (испитивањем подударности излаза модела и реалног система, анализом резултата од стране експерата, анализом осетљивости). Уколико вредновање модела није успешно, потребно је вратити се на тачку 4 (измене у симулационом моделу).

8. Планирање симулационих експеримената и њихово извођење
Планирање симулационих експеримената који омогућују испуњење циља студије (план промене параметара модела, понављање експеримента због анализе утицаја случајних променљивих, идр). Извођење симулационих експеримената према усвојеном плану.

9. Анализа резултата експеримената
Статистичка анализа резултата симулационих експеримената. Током анализе резултата може се показати потреба за допуном корака 8 (извођење додатних експеримената).

10. Закључци и препоруке
Презентација релевантних резултата на основу којих се могу донети одговарајуће одлуке (избор конфигурације система,
измене у систему, идр.).

8. Поделе и врсте симулационих модела.

Разликујемо два основна начина поделе симулационих модела: први, према врсти променљивих у моделу и други, према начину на који се стање у моделу мења у времену.

Детерминистички и стохастички модели
Детерминистички модели су они чије се понашање може предвидети, односно у којима је ново стање система у потпуности одређено претходним стањем.
Стохастички модели су они чије се понашање не може унапред предвидети, али се могу одредити вероватноће промена стања система. Дакле, за стохастичке моделе је карактеристично случајно понашање, односно постојање случајних променљивих у систему.
Слика 1.6 на 25-ој страни књиге.

Дискретни и континуални модели
У дискретним моделима стање система се мења само у појединим тачкама у времену (нема континуалне промене стања). Такве промене се називају догађаји.
У континуалним моделима променљиве стања се мењају континуално у времену. Треба имати у виду да се на дигиталним рачунарима не могу изводити континуалне промене величина, већ се оне морају апроксимирати скупом дискретних вредности.
Могући су и мешовити, континуално-дискретни модели који садрже
и континуалне и дискретне променљиве.
Слика 1.7 на 26-ој страни књиге и мали примери....

Врсте симулационих модела

Четири основне врсте симулационих модела су:
- Монте Карло (Monte Carlo) симулација
- Континуална симулација
- Симулација дискретних догађаја
- Мешовита, континуално-дискретна симулација.

Осим Монте Карло симулације, која је статичка, све остале набројане врсте су динамичке.
- Монте Карло симулација

Монте Карло симулација (статистичка симулација), као што јој и име каже, повезана је са случајним феноменима? Неки аутори Монте Карло симулацијама називају било коју врсту програма који се користе случајним бројевима. С друге стране, у већини литературе овај термин се употребљава само за статичке типове симулације код којих се у решавању проблема користи стварање узорака из расподела случајних променљивих.
Разликујемо следеће типове примене Монте Карло симулације:

<u>Детерминистички проблеми које је тешко или скупо решавати</u>

Типичан пример овога типа је рачунање вредности одређених интеграла који се не могу решити аналитички, тј. чија је подинтегрална функција таква да се не може наћи решење у облику аналитичког израза. Монте Карло симулација приступа прорачуну интеграла тако што се генерише низ случајних тачака (X_j, Y_j) са једнаким вероватноћама унутар одређеног
правоугаоника и потом испитује колико је генерисаних тачака унутар површине која одговара интегралу. Овакав приступ се заснива на генерисању случајних бројева и аналоган је оном који се користи код симулације система са дискретним догађајима.

Сложени феномени који нису довољно познати

За њих је карактеристично да није познат начин узајамног деловања између елемената већ су познате само вероватноће његовог исхода, које се користе за извођење низа експеримената који дају узорке могућих стања зависних променљивих. Статистичком анализом таквих узорака добија се расподела вероватноћа зависних променљивих које су од интереса. Најчешће примењује код анализирања друштвених или економских феномена.

Статистички проблеми који немају аналитичка решења

Нпр. процене критичних вредности или тестирање нових хипотеза. Приликом решавања таквих проблема такође се користи генерисање случајних бројева и променљивих.

- Континуална симулација

Континуална симулација се користи за динамичке проблеме код којих се променљиве стања мењају континуално у времену. Постоје две основне класе проблема који се решавају овом методом.
У првој класи су релативно једноставни проблеми који су описани детаљно и код којих су промене "глатке" и природно се описују диференцијалним једначинама. То су проблеми из физике, биологије и инжењерства. У другој класи су проблеми који настају описом веома сложених система у агрегираном облику, у којем се низ елемената система редукује на мањи број компоненти и у којима се промене у систему апроксимирају константним брзинама промене. То су најчешће проблеми из подручја економије и друштвених наука.
Разликујемо три основна типа континуалних симулационих модела:

1. Модели који се описују обичним диференцијалним једначинама
(системи обичних диференцијалних једначина)

Проблеми у вези са разним процесима где се ради о једној непознатој функцији ($y = y(t)$) једне независно променљиве (t), изражавају се математички једначинама у којима се, поред независно променљиве и непознате функције, јављају (обавезно) и изводи те функције
(dy/dt). Тим једначинама се у сваком конкретном случају успоставља веза између непознате функције (y), њене реалне променљиве (t) и њених извода (y') и такве се једначине називају обичне диференцијалне једначине. Модели који се описују обичним диференцијалним једначинама
или њиховим системима могу се у одређеним случајевима решити аналитички, али је то доста ретко код стварних проблема. Због тога се за такве једначине морају користити нумеричке методе. Нумеричке методе које служе за решавање диференцијалних једначина код којих се као независна променљива јавља време, уобичајено се називају методе континуалне симулације.

2. Модели који се описују системима парцијалних диференцијалних једначина
Парцијалне диференцијалне једначине садрже више од једне независне променљиве (X_j) по којима се траже изводи зависне променљиве. Типични примери проблема који се могу описати парцијалним диференцијалним једначинама су проблеми аеродинамике, хидродинамике и метеорологије.

3. Модели динамике система (System Dinamics)

Динамика система је методологија истраживања, моделирања и симулације сложених динамичких система. Системи са повретном везом су основни тип система који се моделирају динамиком система. Повратна веза може бити позитивна или негативна. Модели са повратном везом користе се најчешће за моделирање инжењерских, биолошких, друштвених и економских система.
Динамика система приказује системе као повезане управљачке петље. При томе су појединачни догађаји јако агрегирани, а последица тога је да се могу описивати као континуални токови описани диференцним једначинама. Ново стање система у наредном тренутку времена рачуна се на основу стања у претходном тренутку времена и разлике улазних и излазних
токова за то стање у претходном интервалу времена. Да би прорачун могао почети, неопходно је да буду задате почетне вредности величина као и вредности свих константи и параметара које модел садржи.

- Симулација дискретних догађаја

Симулација дискретних догађаја је специфична методологија симулације која се бави моделирањем система који се могу представити скупом догађаја. Под догађајем овде се подразумева дискретна промена стања ентитета система. Догађај наступа у одређеном тренутку времена, односно промене стања ентитета се дешавају дисконтинуално у времену, тј. само у неким временским тренуцима. Симулација описује сваки дискретни догађај, крећући се од једног догађаја до другог при чему настаје помак (прираст) времена симулације. Између два узастопна догађаја, стање система се не мења.

- Мешовита симулација

Код појединих врста система, континуална симулација као и симулација дискретних догађаја, не могу у потпуности да опишу начин рада система. Да би се такви системи моделирали и симулирали, развијена је мешовита симулација која омогућава интегрисање континуалних и дискретних елемената система. Веза између дискретног и континуалног приступа постиже се увођењем два типа догађаја. Временски догађаји су догађаји које генерише механизам управљања догађајима, какав постоји у симулацији дискретних догађаја. Они могу да изазову тренутну промену стања континуалне променљиве. С друге стране, догађаји стања су они догађаји које активира механизам помака времена са константним прирастом, чији је временски интервал мали, а који је карактеристичан за континуалну симулацију. Ови догађаји могу да активирају догађаје дискретног дела модела. Познатији симулациони језици за мешовиту симулацију су GASP и SLAM.

Избор типа симулационог модела
Тип симулационог модела најчешће се одабира тако да буде једнак
типу оригиналног система. Најважније при избору симулационог модела је да модел буде што једноставнији и разумљивији, како због његовог лакшег развоја и модификације, тако и због потребе да га корисник што лакше
разуме. Осим тога, значајан фактор при избору модела увек мора да буде и његова цена, као и ефикасност у погледу утрошка ресурса рачунара, како би се могао ефикасно користити за решавање проблема.

9. Класификације модела.

Модели могу да се класификују према разним класификационим критеријумима. Овде ћемо указати на неке најважније.

- Класификација у односу на променљиве
- Класификација у односу на природу опсега вредности променљивих модела
- Класификација у односу на природу опсега вредности променљиве "време"
- Класификација у односу на временску зависност модела
- Класификација у односу на детерминизам
- Класификација у односу на предвиђање будућности

- Класификација у односу на линеарност
- Класификација према врсти рачунара
- Класификација у односу на формални опис модела

1. Класификација у односу на променљиве

Код сваког модела могуће је идентификовати описне променљиве значајне за његово разумевање, опис и управљање. Скуп описних променљивих се може поделити на подскуп оних које је могуће и подскуп оних које није могуће посматрати. Све описне променљиве једног модела могу се поделити на улазне, излазне и променљиве стања. Свака променљива има свој опсег или домен - скуп вредности које јој се могу доделити, као и једну
функцију којом се описују промене тих вредности у времену. Модели који немају ни једну променљиву стања називају се модели без меморије или тренутне функције. Њихове излазне променљиве зависе од вредности улазних променљивих у тренутку посматрања. Зависно од улазних променљивих, модели могу бити аутономни (без улазних променљивих) и неаутономни (са улазним променљивама). Аутономни модел који не садржи излазну променљиву назива се затворени. С друге стране, аутономни модели који имају излазне промењиве и сви неаутономни модели називају се отворени модели.

2. Класификација у односу на природу опсега вредности променљивих модела

Описне променљиве могу узимати вредности из пребројивог (дискретног) или непребројивог, односно континуалног скупа. У складу са тим разликујемо три класе модела:

1. <u>Модели са дискретним стањима</u>

Код ових модела све три врсте описних променљивих (улазне, излазне и променљиве стања) узимају вредности из скупова чији су елементи дискретне вредности.

2. <u>Модели са континуалним стањима</u>

Код ових модела све три врсте описних променљивих узимају вредности из подскупова реалних бројева.

3. <u>Модели са мешовитим стањима</u>

Поједине променљиве узимају вредности из разних подскупова чији су елементи дискретне вредности, а остале променљиве из различитих подскупова реалних бројева.

3. Класификација у односу на природу опсега вредности променљиве "време"

Скуп вредности које се додељују променљивој "време" може бити пребројив или непребројив. Стога разликујемо моделе са континуалним временом и моделе са дискретним временом, две подкласе ових модела:

- моделе са континуалним временом и континуалним променама стања
- моделе са континуалним временом и дискретним променама стања (иако време тече континуално, промене стања се могу дешавати само у дискретним скоковима)

У дискретним временским моделима, време се повећава у инкрементима који не морају бити еквидистантни, две подкласе модела:

- моделе са дискретним временом и континуалним променама стања
- моделе са дискретним временом и дискретним променама стања

Променљиве симулационог модела се могу мењати на било који од четири наведена начина: континуално у континуалном времену, дискретно у континуалном времену, дискретно у дискретном времену и континуално у дискретном времену. Код сложених модела, у већој мери се користе променљиве које узимају вредности из дискретног скупа и у дискретној временској основи. За моделе код којих се промене вредности променљивих стања дешавају у дискретним временским тренуцима, трајање симулације зависи од изабраног временског корака, тј. од изабране временске јединице. Временски корак може бити константан или променљив.

4. Класификација у односу на временску зависност модела

Третира питање експлицитне зависности правила интеракције модела од времена. Уколико је структура модела зависна од времена, тада се ради о временски променљивом – варијантном моделу. У супротном, када је структура модела независна од времена, модел се назива временски непроменљив - инваријантан. Такав модел се још назива и стационарни модел.

5. Класификација у односу на детерминизам

Укључивање случајних променљивих у опис модела. У детерминистичким моделима, вредности променљивих стања и улазних променљивих у једном тренутку једнозначно одређују вредности променљивих стања у следећем тренутку. Такви модели не садрже случајне променљиве.
У недетерминистичким (стохастичким) моделима постоји бар једна случајна променљива.

6. Класификација у односу на предвиђање будућности

Узимају у обзир и будуће вредности улазних променљивих, уколико то није случај, модел је неантиципаторски. Код модела који служе за планирање будућности (производња, инвестиције, становништво) неопходно је узети у
обзир будуће вредности улазних променљивих.
Код антиципаторских модела постоји посебан модул помоћу кога се генеришу будуће вредности улазних променљивих, а затим се симулација понавља уз коришћење претходно генерисаних вредности.

7. Класификација у односу на линеарност

Поштују законитости линеарних трансформација. Једна линеарна трансформација $L : U \to Y$ задовољава принцип суперпозиције, ако за и важи : **formula na 38 strani knjige!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!**

8. Класификација према врсти рачунара

Три врсте рачунара се могу користити за симулацију:
- аналогни
- дигитални
- хибридни

Скоро сви модели се могу симулирати на дигиталним и хибридним рачунарима. На аналогним рачунарима се могу симулирати само континуални модели са континуалним временом.

9. Класификација у односу на формални опис модела

За схватање специфичних формализама моделирања. Табела 2.2 39
Под формалним описом модела се подразумева прецизан, математички опис модела.
Модели са континуалним променама времена се описују диференцијалним једначинама и спадају у континуалне временске моделе, Према томе, дисконтинуални модели су они модели у којима су најмање једна променљива стања и/или њен извод дисконтинуални. Slika 2.2 40 str
Дискретни модели мењају своје стање у дискретним временским тренуцима. Између два узастопна временска тренутка, стање модела остаје непромењено. Дискретни модели могу бити дискретни временски и континуални временски модели.

10. Формална спецификација модела

Свака класа објеката, може се представити одговарајуђим формализмом који дефинише њене параметре и ограничења. Да би се дефинисао посебан објекат неке класе у оквиру неког формализма, параметрима формализма
додељују се вредности које задовољавају ограничења. Структура формализма односи се како на параметре, тако и на ограничења. Класе објеката су најчешће повезане тако да се те везе могу формализовати као пресликавања из једне класе у другу. Посебно су интересантне три врсте таквих пресликавања: апстракција, асоцијација и спецификација.

Апстракција

Апстракција је пресликавање које подразумева контролисано укључивање детаља приликом описивања модела. То је процес којим се остављају по страни поједини детаљи објеката, односно врши се раздвајање битних особина од небитних, како би се указало на суштину неког објекта. Изворну класу називамо "конкретном", а ону другу, циљну, "апстрактном". Значај апстракције је у томе што је могуће већи број изворних објеката представити истим одредишним апстракцијама.

Асоцијација
Асоцијација је врста пресликавања од вишег ка нижем нивоу у хијерархији спецификације система. Инверзно пресликавање називамо реализацијом или имплементацијом.

Спецификација
Да би успоставили релације између објеката различитих сродних подкласа, потребно је дефинисати пресликавање које преводи један посебан формализам у други, генералнији. Уколико постоји такво пресликавање, сви концепти и акције који се могу применити над објектима дефинисаним у генералном формализму, примењиви су и над објектима дефинисаним у посебном формализму.

21. Strategija raspoređivanja događaja
Mehanizam raspoređivanja događaja podrazumeva da se događaji planiraju unapred i drže u listi budućih događaja, najčešće sortirani po vremenu nastupanja i prioritetu. Procedura planiranja događaja je sledeća: generiše se sled događaja, zatim se dodele vrednosti njegovih atributa. Atributi mogu biti: identifikatori tipa događaja, vreme njegovog nastupanja, prioritet kao i drugi. Lista budućih događaja je uređena po vremenu nastupanja događaja i njihovom prioritetu.
Funkcionisanje simulatora se odvija na sledeći način: sa liste budućih događaja uyima se prvi događaj. Tada se ažurira simulacioni sat na vreme njegovog nastupanja. Na osnovu tipa izabranog događaja poziva se odgovarajuća procedura koja izvršava sva ažuriranja u modelu i simulatoru, povezana sa nastupanjem izabranog događaja. Kad se izvrše svi događaji koji imaju isto vreme nastupanja, simulacioni sat se ažurira na vreme sledećeg događaja iz liste budućih događaja. Slika 7.7, strana 120.

22. Strategija skaniranja aktivnosti
Da bi se izvršila simulacija sistema sa diskretnim događajima, potrebno je realizovati računarski program koji skanira i raspoređuje aktivnosti modela. Skaniranje aktivnosti podrazumeva da se događaji implicitno raspoređuju tako da se promena stanja izvršava preko funkcija koje se nazivaju aktivnosti. Svaka aktivnost ima *uslov* i *akciju*. Za svaki vremenski korak aktivnosti se skaniraju i traži se prva aktivnost koja ima zadovoljen uslov. Tada se izvršava odgovarajući programski segment koji specificira akciju za zadatu aktivnost. Proces

skaniranja nastavlja se sve dotle dok sve aktivnosti ne budu blokirane. Onda i samo onda se simulacioni sat ažurira za sledeći vremenski korak.
Skaniranje aktivnosti ima prednosti nad raspoređivanjem događaj u slučajevima kad je broj aktivnosti u modelu mali, a broj događaja u okviru aktivnosti veliki. U tom slučaju se primenom skaniranja aktivnosti štedi na računarskim operacijama koje se odnose na stavljanje događaja na listu i njegovo skidanje sa liste događaja.

23. Strategija interakcije procesa
Interakcija procesa predstavlja tehniku simulacije koja je nastala kombinacijom raspoređivanja događaja i skaniranja aktivnosti. S obzirom na to da model sistema predstavlja skup paralelnih procesa, od kojih neki mogu biti uzajamno isključivi, glavni problem je sinhronizacija procesa. Mogući konflikt koji proističe iz preklapanja procesa rešava se uvođenjem dve naredbe koj ese upotrebljavaju pri specifikaciji događaja: WAIT i DELAY, i to u oba konteksta, uslovnom i bezuslovnom.
WAIT naredba u uslovnom kontekstu ima oblik : WAIT UNTIL <uslov> .
Ukoliko je uslov zadovoljen, proces koji čeka taj uslov, nastaviće svoj tok. U suprotnom, biće blokiran.
Naredbom DELAY koja se u bezuslovnom konteksu u literaturi označava i sa ADVANCE <broj vremenskih jedinica> nastavk procesa odlaže se za specificiran broj vremenskih jedinica. Slika 7.9, strana 123.
U okviru procesora održavaju se dve liste događaja:

1. *Lista tekućih događaja* - sadrži uslovne događaje i sortirana je po prioritetu
2. *Lista budućih događaja* – sadrži raspoređene događaje koji tek treba da nastupe i sortirana je po vremenu nastupanja.

Pre početka simulacije za svaki proces se generiše prvi događaj i stavlja se u listu budućih događaja. Zatim se vreme simulacije ažurira na vreme događaja sa vrha liste budućih događaja.
Rad procesora odvija se u dve faze:

1. Faza ažuriranja vremena simulacije
2. Faza skaniranja liste tekućih događaja

Kada se zadovolji kriterijum za završetak simulacije, vrši se završna obrada rezultata i procesor završava rad.
Interakciju procesa koriste poznati simulacioni jezici GPSS i SIMULA.

24. Pojam sistema: definicija, karakteristike i primeri sistema

- **Sistem** - skup delova koji funkcionišu zajedno radi ostvarenja zajedničkog cilja ili svrhe.
- **Sistem** - *skup objekata ili elemenata povezanih relacijama na taj način da formiraju celinu. Objekti čine celinu radi zajedničkog cilja ili svrhe.*

- **Kontrolni sistem** – skup fizičkih komponenti povezanih relacijama na taj način da komanduju, usmeravaju ili regulišu sebe ili neke druge sisteme.

- Svaki sistem karakteriše se:
  - ✓ **svojstvima objekata** koji čine taj sistem i
  - ✓ **vezama** koje odražavaju uzajamnu zavisnost datog sistema i spoljašnje sredine.

- Ostatak realnog sveta naziva se **spoljašna sredina** (okruženje) sistema.

Primeri sitema... ?

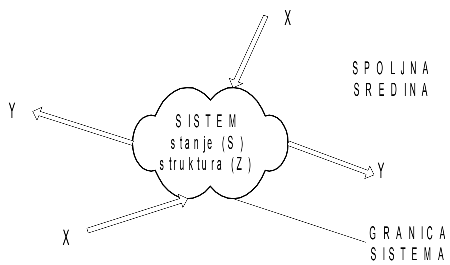
25. Okruzenje sistema, ulazi i izlazi sistema

- Svaki sistem karakteriše se:

- ✓ **svojstvima objekata** koji čine taj sistem i
- ✓ **vezama** koje odražavaju uzajamnu zavisnost datog sistema i spoljašnje sredine.

- Ostatak realnog sveta naziva se **spoljašna sredina** (okruženje) sistema.

- Veze sistema sa sredinom – **ulazi i izlazi sistema**. U najopštijem smislu oni su nosioci materije energije i informacija koje se razmenjuju izmedju posmatranog sistema i spoljašnje sredine.



- **Ulaz** se nalazi na nekom toku i predstavlja pobudu spoljne sredine ili neophodnu razmenu sa spoljnom sredinom. Ulaz može ali ne mora biti iniciran ili pod kontrolom sistema.

- **Izlazi** su stvarna reakcija sistema. Oni mogu ali ne moraju biti jednaki pobudi spoljne sredine preko ulaza. Izlaz zavisi od ulaza i stanja sistema. U opštem slučaju izlaz je različit od stanja sistema. On se ostvaruje na istom toku iza stanja sistema i njegova je funkcija.

26. Ciljevi sistema: opstanak, rast i razvoj

Kod najvećeg broja sistema poznati su ciljevi. Za veliki broj sistema ciljevi su vezani za **opstanak, rast i razvoj**.

- **Opstanak** – svaka jedinka se bori za svoj opstanak, samostalno ili uključena u neki drugi sistem. Opstanak kod preduzeća znači obezbediti i održavati unutrašnje odnose i odnose sa spoljnom sredinom tako da preduzeće može da postoji.

- **Rast** – je povezan sa integracijom više jedinki u nov sistem koji lakše obezbeđuje pre svega opstanak, ali i druge prednosti. Rast kod preduzeća opet znači povećanje njegovih potencijala i stepena efikasnosti u korišćenju tog potencijala.
- **Razvoj** je ono što se uočava kroz evoluciju i što obezbeđuje nove kvalitete.
- **Cilj** je uopšte uzevši, određen željenim stanjima i izlazima sistema u određenom trenutku ili intervalu vremena.
- **Cilj** je bliže određivanje ostvarenja svrhe preko potrebnih stanja i izlaza sistema.

27. Stanje sistema, prostor stanja sistema i oblast dopustenih stanja sistema

- **Stanje sistema** – skup podataka koji daju potpunu informaciju o predistoriji i sadašnjem stanju atributa objekata sistema. Ako je moguće te informacije kvantifikovati dobija se skup svih veličina S_1, S_2, ..., S_n, koji određuje stanje sistema kao vektorka veličina Euklidov-og n-dimenzionog prostora.

- Prostor u kome se svako stanje prikazuje određenom tačkom naziva se **prostor stanja sistema**. Broj dimenzija prostora stanja je jednak broju atributa objekata sistema koje određuje njegovo stanje. U svakom vremenskom trenutku stanje sistema se može prikazati tačkom u prostoru stanja sistema.

- **Oblast dopuštenih stanja -** oblast prostora stanja u kojoj se može naći tačka stanja.

28. Struktura sistema: pojam i karakteristike, adaptivni sistemi

- **Struktura sistema** – opšti kvalitativno određen i relativno stabilan poredak unutrašnjih odnosa između elemenata sistema.

- **Adaptivni sistemi -** oni koji imaju sposobnost prilagođavanja strukture prema okolini na način koji je povoljan za nastavljanje postojanja.

- Strukturu sistema određuje njegova svrha, odnosno cilj, uzimajući u obzir sve prirodne i društvene važeće relacije između objekata.

29. Sistemsko razmisljanje i dinamika sistema

Sistemsko razmisljanje... ?

METODOLOGIJA ISTRAŽIVANJA DINAMIKE SISTEMA
Faze istraživanja:

- identifikacija pojave i problema istraživanja, definisanje cilja istraživanja i funkcije cilja
- iznalaženje uređenosti realnog sistema uzimajući u obzir cilj istraživanja
- određivanje faktora realnog sistema koji su uticali na sistem u prošlosti, koji utiču sada i čiji se uticaj može pojaviti u budućnosti
- formulisanje i verifikacija matematičkog modela
- formiranje plana eksperimenta i scenarija za istraživanje različitih ponašanja sistema
- simulacija
- analiza dobijenih podataka
- izbor željene alternative budućeg ponašanja sistema
- program promene realnog sistema da bi se ostvarilo odabrano ponašanje

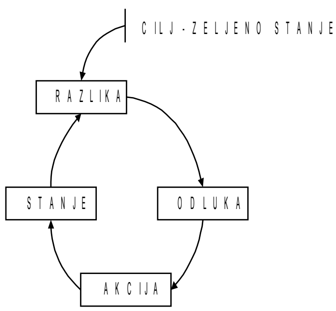
30. Povratno dejstvo, kolo povratnog dejstva, polaritet KPD

- **Povratno dejstvo** – relacije između elemenata mogu biti takve da jedan element posredno, preko drugih elemenata, utiče sam na sebe. Za sisteme kod kojih je to slučaj kažemo da poseduju povratno dejstvo.
-
- **Sistem sa povratnim dejstvom**
  - ✓ ulaz zavisi ili je kontrolisan ranijim događajima u njemu (zavisi od izlaza ili nekog elementa koji se kontroliše)
  - ✓ sistem sa povratnim dejstvom ima strukturu sastavljenu od **kola povratnog dejstva** kroz koje prošle aktivnosti kontrolišu buduuće.

♦ Povratno dejstvo koje povećava uticaj poremećaja na ulaz zove se **pozitivno**, a ono koje smanjuje zove se **negativno**.

♦ **Upravljačko kolo povratnog dejstva** je zatvoreni niz uzročno-povezanih elemenata kod kojih se bar jedan mora odnositi na upravljački proces (posmatranje i odlučivanje), jedan na akcije realizacije odluke, a jedan na stanje sistema kojim se upravlja (izlaz ili potencijal sistema). Ono ima sledeći raspored elemenata u sistemu:

- ✓ odluka koja kontroliše akciju,
- ✓ akcija,
- ✓ stanje sistema koje se menja akcijom,
- ✓ odluka



Odluka i akcija predstavljaju element promene stanja sistema.

- **Prirodno kolo povratnog dejstva** – kolo koje je posledica prirode sistema. Ono ima sledeći raspored elemenata u sistemu:
  - ✓ element sistema I
  - ✓ element sistema II
  - ✓ element sistema III
  - ✓ element sistema I

Dejstvo jednog elementa na drugi dešava se u vremenu. Promena na bilo kom elementu kola povratnog dejstva usloviće sukcesivne promene povezanih elemenata na zatvorenoj putanji kola. (Primer: kola povratnog dejstva za sitem zaliha prvog i drugog reda).
Polaritet kpd

- Kolo povratnog dejstva kod kog impuls uslovljava promenu veličine posmatranog elementa na taj način što se predznak priraštaja na njegovoj veličini menja iz jednog u drugi ciklus prolaza impulsa naziva se **negativnim**.
- Kolo povratnog dejstva kod kog impuls uslovljava promenu veličine posmatranog elementa na taj način što se predznak priraštaja na njegovoj veličini neće menjati iz jednog u drugi ciklus prolaza impulsa naziva se **pozitivnim**.
- Pojava pozitivnih kola povratnog dejstva je posledica prirode međusobnih zavisnosti elemenata sitema. Akcije unutar pozitivnog kola povećavaju razliku između stvarnog i željenog stanja sistema (primer: razmnožavanje bakterija).
- U negativnom kolu povratnog dejstva kontrolnom odlukom se želi dovesti stanje sistema na vrednost datu ciljem koji se formira izvan samog kola. U ovim kolima nastaje smanjenje priraštaja ako se stanje približava željenoj veličini, odnosno povećava se ako se veličina stanja udaljava od željene veličine.

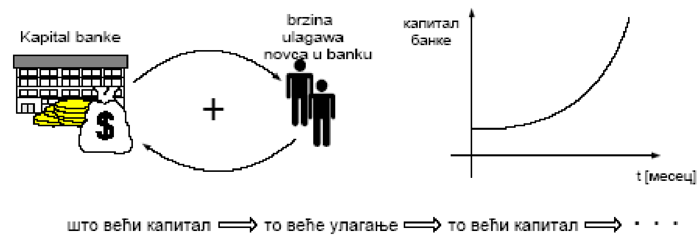
31. Карактеристике система са и без кола повратног дејства

Основне класе система који се моделирају и симулирају у динамици система су системи са повратним дејством. Уколико у неком системупостоје релације између елемената система такве да један елемент посредно, преко других елемената утиче сам на себе, кажемо да у таквом систему постоји повратно дејство *(feedback loop)*. У супротном, реч је о систему без повратног дејства. Другим речима, повратно дејство је затворени круг узрока и последица који утиче на то да неки ж почетни узрок има индиректан утицај на самога себе. Постојање једног или више кола повратног дејства у систему изазива његово сложено понашање у времену. Систем без повратног дејства карактерише се тиме што његов излаз зависи од улаза, али улаз не зависи од излаза. У системима ове класе, прошли догађаји не утичу на будуће и сам систем не контролише своје понашање, односно они функционишу без сазнања о резултатима које остварују. Тачност функционисања ових система одређена је само квалитетом међусобне зависности елемената који их сачињавају. Код ових система не јављају се проблеми везани за нестабилност који се јављају код система са повратним дејством. Већина техничких система припада овој класи. Систем са повратним дејством је онај чији улаз зависи или је контролисан ранијим догађајима у њему, односно зависи, на неки начин, од излаза или неког елемента система који се контролише. Систем са повратним дејством има структуру у којој постоји барем једно коло повратног дејства кроз које прошле активности контролишу будуће.
Кола повратног дејства могу позитивна и негативна.

32. Позитивно коло повратног дејства: појам, особине, примери

Повратно дејство које повећава утицај поремећаја на улаз назива се позитивно. Позитивно повратно дејство значи да неки узрок, преко ланца последица доводи до промена увек у истом смеру. Тако се сталним повратним деловањем постиже стални раст или стално смањење тог узрока. Појава кола позитивног повратног дејства у систему је последица природе међусобне зависности елемената система. Акције унутар кола позитивног повратног дејства стално повећавају разлику између стварног и жељеног стања система. Ова кола у систему имају улогу у остваривању циљева који се односе на раст и развој.

Једноставан пример позитивног кола повратног дејства је оно у коме се прати утицај брзине улагања новца на величину капитала банке. Претпоставимо да у почетном тренутку посматрања банка располаже одређеним капиталом. Висина тог капитала одређује положај банке на тржишту новца. Већи капитал значи предност за банку јер привлачи улагаче, на пример преко величине каматне стопе коју банка одређује или преко гаранција коју банка пружа у погледу сигурности улога. Уз одређену стопу улагања, могуће је за дати (почетни) капитал банке одредити количину новца која ће бити уложена у банку у посматраној јединици времена (нпр. месец), која ће повећати почетни капитал банке. Због повећаног капитала банке, на почетку наредног месеца, количина уложеног новца у том месецу биће још већа, што ће даље повећати капитал банке, итд.



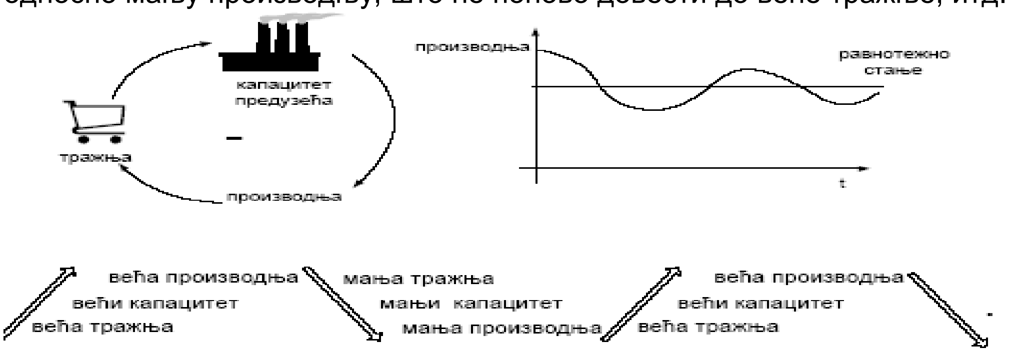
Слика 11.1 Позитивно коло повратног дејства

33. Негативно коло повратног дејства: појам, особине, примери

Негативно повратно дејство је оно које смањује утицај поремећаја на улаз. Оно омогућава успостављање равнотежног стања у систему, када је оно нарушено неким поремећајем. Негативно повратно дејство заправо значи да неки узрок, преко ланца последица доводи до промене смера сопственог деловања. Уколико посматрани узрок порасте изнад неког равнотежног стања, повратно дејство ће смањити тај узрок и обратно, када узрок постане мањи од равнотежног стања,

тада ће повратно дејство проузроковати повећање тог узрока. На тај начин позитивно коло повратног дејства "стабилизује" узрок око неког равнотежног стања.

Једноставах пример у коме се посматра узајамни утицај тражње за производима неког предузећа, капацитета предузећа и производње. Повећана тражња на тржишту за производима предузећа утиче на повећање улагања у проширење капацитета предузећа. Већи капацитети омогућавају већу производњу тражених производа, а већа производња брже задовољава тражњу, која се даље смањује. Смањење тражње у наредном циклусу посматрања, условиће мање ангажовање расположивих капацитета, односно мању производњу, што ће поново довести до веће тражње, итд.

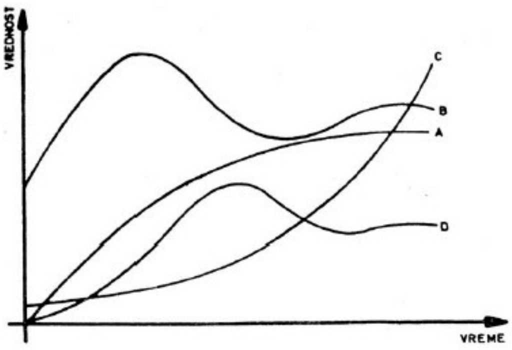


Слика 11.2 Негативно коло повратног дејства

Описана повратна дејства по правилу се не остварују у кратким ланцима узрока и последица, какви су приказани у претходним примерима. У реалном систему, она заправо настају у знатно дужем и сложенијем низу узрока и последица. Такође, реални системи најчешће садрже мешавину позитивних и негативних кола повратног дејства која одређују њихово понашање у времену. Њихова анализа подразумева одређивање оних фактора који доминантно утичу на понашање система.

Не тражи се директно али није тешко па можете да прочитате На слици 11.3 приказани су неки ***карактеристични облици*** *понашања система са повратним дејством.*

*Крива **A** је типична крива за једноставнији систем са повратним дејством код кога променљива расте са опадањем величине прираштаја (однос величине излаза и улаза). После извесног времена приращтај тежи нули и крива се асимптотски приближава некој вредности. Пример оваквог понашања је раст у запошљавању. У систему доминира негативно коло повратног дејства.*
*Крива **B** описује сложеније достизање коначне вредности (осциловање око коначне вредности). Може настати због претераног кашњења у колу повратног дејства или због нагле корекције разлике између стварног и жељеног стања. Примери оваквог понашања су: раст или опадање индустријске производње унутар економских циклуса и промена цене условљена законом понуде и потражње. Системом доминира негативно коло повратног дејства.*



Слика 11.3 Неки типични облици понашања система са повратним дејством

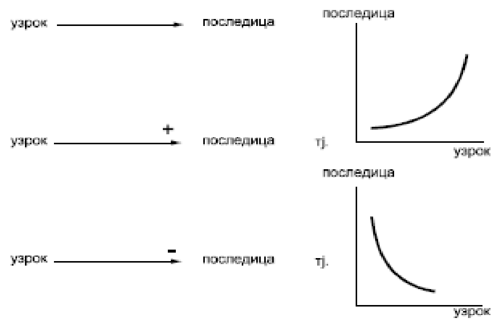
*Крива **C** приказује експоненцијални раст. Примери оваквог понашања су: размножавање ћелија и раст продаје који зависи само од броја продаваца. Доминантан утицај има позитивно коло повратног дејства.*
*Крива **D** приказује почетни експоненцијални раст, а потом флуктуације у достизању неке вредности. Примери оваквог понашања су: понашање броја животиња и раст новог производа. У почетку у систему доминира позитивно, а потом негативно коло повратног дејства.*

Основни појмови система са повратним дејством (*ово је заједничко за питања 31 и 32- може и не мора)*
За описивање система са повратним дејством, у динамици система употребљавају се следећи основни појмови:
♦ стања система
♦ промене стања система
♦ кашњења
Стања система (level - ниво) представљају стања ресурса, односно различите акумулације ресурса. Стања су мерљиве величине, а њихове димензије изражавају се у јединицама ресурса. Неки примери стања система су: број становника, количина воде у резервоару, количина робе на залихама, новац на рачуну итд. Стањима система се може управљати и на тај начин утицати на брзину њихове промене и на њихово равнотежно стање. Своју вредност, ове величине имају и када систем не функционише.
Промене стања система (rate – брзина) или *функције одлучивања* су акције или токови који доводе до повећања или смањења стања система, у јединици времена. То су променљиве које показују брзину претварања ресурса из једног у друго стање. У динамици система, ове се величине посматрају као просечне брзине промене у неком периоду времена, а изражавају се у јединицама ресурса у јединици времена.
Кашњења представљају консеквенце промена које се не дешавају истовремено када су покренуте. Наиме, у техничким, економским, друштвеним али и у већини других система, промене се не дешавају истовремено када су покренуте, већ је неопходно да протекне одређено време (кашњење) да би се промена изазвана на једном елементу у систему пренела на други елемент, који је са њим повезан.

Један део кашњења се односи на материјална кашњења, а други на кашњења информација. Кашњења у систему могу имати значајне последице на понашање система, и она по правилу изазивају осцилације у понашању система. У већини случајева када је могуће смањити кашњења, смањиће се и осцилације и систем ће радити уједначеније.

34. Дијаграми узрочно последичних веза

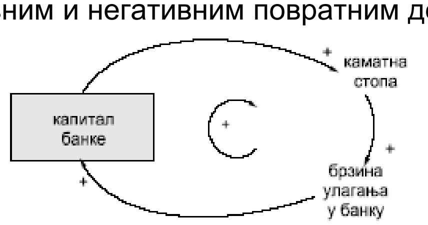
Концептуални модели омогућавају експлицитни приказ елемената система и релације које између њих постоје у графичком облику. На тај начин они олакшавају развој симулационих (рачунарских) програма и повећавају њихову поузданост. У динамици система користе се две класе концептуалних модела: диајграми узрочних петљи и дијаграми токова. У анализи система са повратним дејством уобичајено је да се најпре одреде везе између елемената система и да се идентификују врсте тих веза, а потом идентификују повратна дејстава у систему и одреди њихов поларитет. Најједноставније је да се то изрази у графичком облику. За приказивање узрочно последичних веза између елеманата система са повратном дејством у динамици система користе се
дијаграми узрочних петљи. Графички симболи ових дијаграма приказани су на слици 11.3.



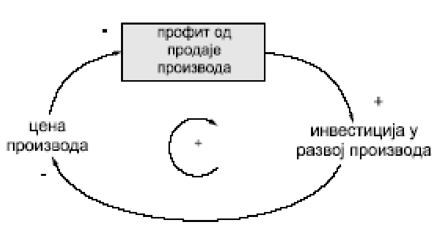
Слика 11.3 Приказивање релација у дијаграмима узрочних веза

Линија са стрелицом означава смер везе између узрока и последице. Ако је на крају стрелице знак плус, то значи да се узрок и последица мењају у истом смеру, а ако је на крају стрелице знак минус, тада се узрок и последица мењају у супротном смеру. Полукружна стрелица у средини петље са знаком плус означава позитивно повратно дејство, а са знаком минус негативно повратно дејство. Код сложенијих кола, тип повратног дејства се најлакше може одредити на следећи начин:
Само позитивне везе: позитивно повратно дејство
Паран број негативних веза: позитивно повратно дејство
Непаран број негативних веза: негативно повратно дејство

На слици 11.4 приказано је неколико једноставнијих примера дијаграма узрочних петљи код система са позитивним и негативним повратним дејством.

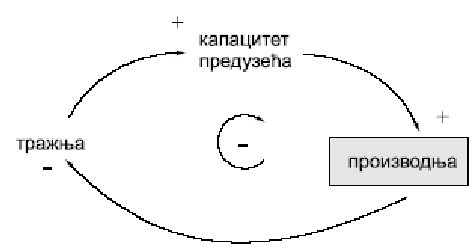


(а) Пораст капитала банке везан за пораст каматне стопе



(б) Предузеће које инвестира у развој производа

Слика 11.4 Неки примери позитивног повратног дејства



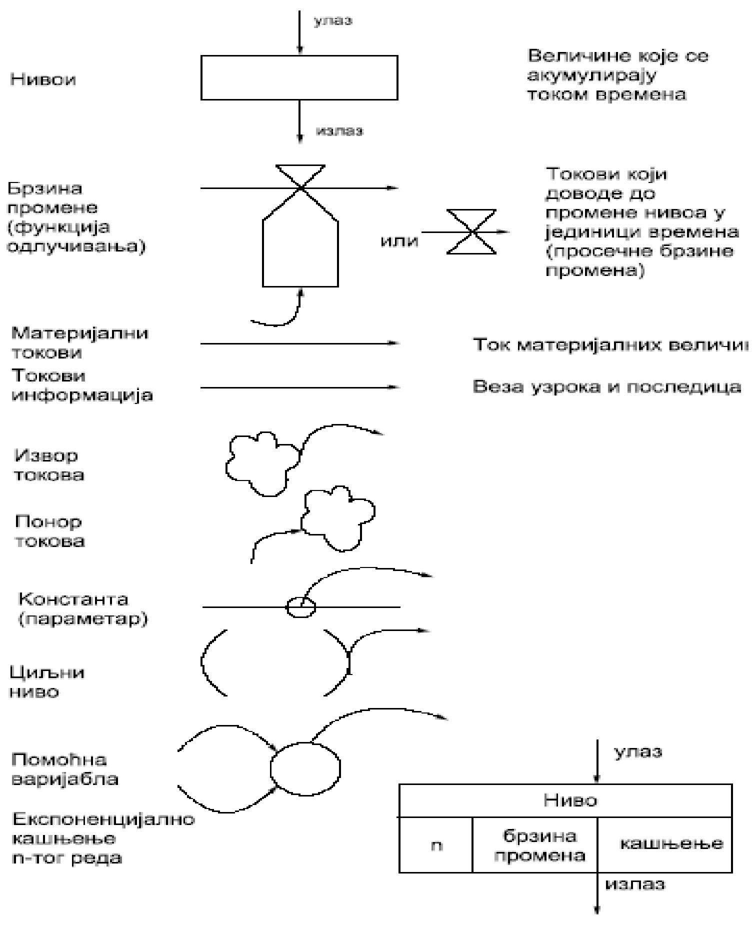
Тражња и капацитет производње

Слика 11.5 Пример негативне повратног дејства везе

У пракси, ретко се срећу системи који се састоје само од једне петље повратног дејства, како је то приказано у претходним примерима, већ је уобичајено да се системи описују већим бројем петљи које су повезане преко заједничких елемената који у њима учествују.

35. Дијаграми тока

Концептуални модели којима се идентификују стања система, промене стања система и кашњења у систему називају се д*ијаграми тока* и служе за прецизније графичко представљање посматраног система. Ови модели чине основу за писање рачунарских модела у динамици система. Основни симболи који се користе за конструисање дијаграма тока дати су на слици 11.6.



Слика 11.6 Елементи дијаграма тока

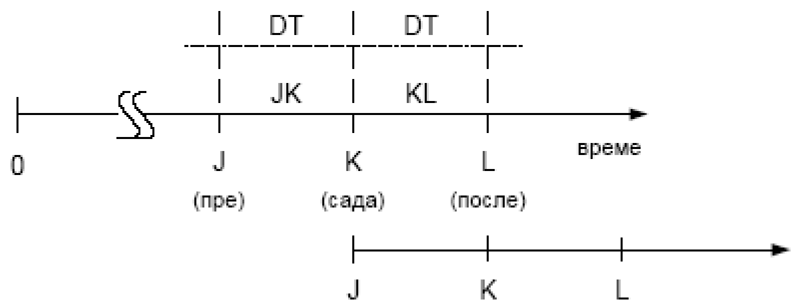
Линијама се означавају токови у систему. Њима се дефинише начин на који ресурси у систему прелазе из једног стања у друго. Материјални токови означавају се пуном, а информациони испрекиданом линијом. Сваки ток има одговарајући симбол за извор (почетак тока изван система) и понор (одредиште тока изван система).
Стања система су величине које се акумулирају током времена. На дијаграму тока представљају се правоугаоницима унутар којих се уписује њихов назив. Промене стања одређују протоке на токовима. То су просечне брзине (промена стања у јединици времена) које се често називају и функције одлучивања пошто се преко њих управља стањима система.
Промене стања које се налазе на улазном току стања система, називају се улазне промене стања, док су излазне промене стања оне које се налазе на излазном току тог стања.
Константе су величине у моделу које се не мењају током времена.
Помоћне променљиве се налазе на токовима информација и служе за опис елемената промене стања. Јављају се као издвојени елементи јер имају своје независно значење.
.

36. Рачунарски модели у динамици система

На основу израђеног дијаграма тока који представља детаљан концептуални модел система, ствара се рачунарски модел система.
Рачунарски модели динамике система приказују квантитативне везе између елемената система и омогућују извођење планираних симулационих експеримената са моделом система. Они се приказују у облику система диференцних једначина. Једначине модела приказују промене вредности променљивих модела између узастопних, временских тренутака, удаљених за изабрани, константни, временски корак.
Да би се извела симулација, односно добило понашање система
у времену, потребно је решити систем диференцних једначина рачунарског модела, за шта се користе нумеричке u1084 методе интеграције.

Описивање промене времена у једначинама модела
Стања система у динамици система израчунавају се у дискретним тренуцима времена, рецимо *t=0,.... , T,* међусобно удаљеним за константан временски интервал *DT*. Величину *DT* бира моделар и од ње

зависи тачност резултата и време извођења симулације. Математички гледано, овај приступ подразумева коришћење диференцних једначина. Временска оса у динамици система садржи три узастопна, еквидистантна тренутка времена (*t-1, t, t+1*), који се означавају са J, K и L (слика 11.7).



Слика 11.7 Временска оса у динамици система

Временски тренутак J представља претходно, тренутак K садашње, а тренутак L будуће време. Основни временски интервал је време између два узастопна временска тренутка и означава се са DT. Лако је уочити да је:
К=J+DT
L=K+DT
Интервал времена између тренутака J и К обележава се са JК, а интервал између К и L са KL. Основи интервал времена одређује се на основу расположивих података и може представљати дан, недељу месец, квартал, годину итд.
Вредности стања система обележавају се на следећи начин: стање.J ; стање.К ; стање.L
Вредности промена стања представљају просечне брзине промена стања и између два узастопна временска тренутка. Третирају се као константе, а означавају се на следећи начин: промена стања.JК ; промена стања.KL
Сада размотримо следећу једначину

$$y_t = y_{t-1} + \Delta y$$

Уколико је брзина промене између *t-1*и *t* константна, тада следи:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = c(t-1, t)$$

Комбиновањем горња два израза добија се:

$$y_t = y_{t-1} + \Delta y \cdot c(t-1, t)$$

Превођењем горњег израза у симболичку нотацију која се користи у динамици система, добија се: стање.К=стање.J + DT(промена.JК) што представља општу једначину за одређивање вредности елемента стања система. Уколико посматрано стање система има и улаз и излаз, тада ће брзина промене у времену бити једнака разлици улазних и излазних токова, односно
промена.JК=улаз.JК-излаз.JК
Решавање једначина стања и једначина промене стања у времену, врши се у следећим корацима:
1. Време се помера на тренутак К.
2. Израчунавају се вредности стања система у тренутку К. За прорачун се користе једначине стања система.
3. Израчунавају се вредности свих промена стања за наредни интервал КL) на основу добијених вредности стања система у тренутку К).
4. Преименују се стања система и промене стања система: К → J ; L → K, да би се омогућило коришћење истих једначина.
5. Време се помера за DT и нови садашњи тренутак поново називамо К.

Цео описани циклус се понавља док се симулација не заврши (не постигне задато време трајања симулације. Да би прорачун могао да отпочне, неопходне су почетне вредности за сва стања система, као и вредности за све константе и параметре система. На тај начин добија се узастопни низ вредности променљивих модела у временским тачкама, међусобно удаљеним за DT.

37. Моделирање система у програмском језику SDS
SDS је програмски пакет за симулацију динамике система.
Првенствено је намењен за симулационе моделе који се могу описати елементима стања, елементима промене стања и дискретном променом времена, при чему се може користити Euler-ова метода или метода Kutta-Merson-a, која омогућава контролу тачности рачунања за нумеричко решавање система диференцних једначина. Такође, са успехом се може користити за решавање система диференцијалних једначина типа:

$$\left(d_y / d_x\right)_i = f_i\left(x, y_1, y_2, \dots, y_n\right), \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

Програмски пакет SDS омогућује:
♦ симулацију понашања система и
♦ анализу понашања система.

38. Тест функције: PULSE, RAMP, STEP.

- Импулсна функција

PULSE (PLH, PLT)

PLH – величина импулса

PLT – време старта импулса

PULSE = 0 сем у тренутку PLT kада има вредност PLH.

- Одскочна функција

STEP (STH, STT)

STH - величина скока

STT - време старта скока

до времена STT вредност функције је 0, а затим је STH.

- Линеарно растућа функција

RAMP (RPSL, RPT)

RPSL - прираштај

RPT – време старта

вредност функције је 0 до времена RPT,а затим линеарно расте са прираштајем RPSL.

39. Кашњење: појам, особине, врсте

Кашњења представљају консеквенце промена које се не дешавају истовремено када су покренуте. Наиме, у техничким, економским, друштвеним али и у већини других система, промене се не дешавају истовремено када су покренуте, већ је неопходно да протекне одређено време (кашњење) да би се промена изазвана на једном елементу у систему пренела на други елемент, који је са њим повезан. Један део кашњења се односи на материјална кашњења, а други на кашњења информација. Кашњења у систему могу имати значајне последице на понашање система, и она по правилу изазивају осцилације у понашању система. У већини случајева када је могуће смањити кашњења, смањиће се и осцилације и систем ће радити уједначеније.

47. Случајни догађаји, вероватноћа, случајне променљиве

Догађаји који се у датој појави могу остварити а исто тако и не остварити, називамо <u>случајни догађаји</u>, док појаве које изучавамо преко случајних догађаја називамо експерименти.

Скуп могућих исхода експеримента зовемо скуп елементарних догађаја, и било који резултат експеримента потпуно се описује једним и само једним елементом из скупа могућих исхода. Скуп елементарних догађаја може бити: коначан, бесконачан и пребројив, и бесконачан и непребројив.

Карактеристике случајних догађаја:

1. Случајни догађај је подскуп скупа елементарних догађаја.
2. Немогућ догађај је подскуп скупа елементарних догађаја који нема ниједан елемент, и означава се са $\emptyset$.

3. Нека је дат случајан догађај *A*. Супротан догађај је догађај *A* који се оствари онда и само онда када се *A* не оствари.
4. Супротан догађај немогућег догађаја је сигуран догађај.
5. Дата су два случајна догађаја *A* и *B*. Ако се сваки пут када се оствари догађај *A* остварује и *B* , кажемо да *A* имплицира *B* $[A \Rightarrow B]$.

6. За два случајна догађаја *A* и *B* кажемо да су једнаки ако истовремено *A* имплицира *B* и *B* имплицира *A* , тј. ако је $[A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A]$.

7. Нека су дати случајни бројеви *A* и *B*. Унија догађаја *A* и *B* је догађај који се оствари онда и само онда када се оствари бар један од догађаја *A* и *B*, и означава се са $A \cup B$.

8. Пресек догађаја *A* и *B* је случајан догађај који се остварује онда и само онда кад се остваре оба догађаја, тј. када се истовремено оствари догађај *A* и догађај *B*, и означава се са $A \cdot B$ или AB или $A \cap B$.
9. За два догађаја *A* и *B* кажемо да се међусобно искључују ако је њихов пресек немогућ догађај, тј. ако је $A \cap B = \emptyset$.

10. Ако се два догађаја *A* и *B* међусобно искључују, тада је њихова унија збир тих догађаја и означавамо то са $A \cup B = A + B$.

11. За операције уније и пресека који су дефинисани на случајним догађајима важе следећа три закона:
♦ Комутативност
♦ Асоцијативност
♦ Дистрибутивност

Вероватноћа случајних догађаја је свака функција P дефинисана на случајним догађајима која пресликава случајне догађаје у реалне бројеве и која има следеће особине:

1. Ненегативност. Сваком случајном догађају *A* функција *P* придружује ненегативан број *P(A)*.
2. Нормираност. Сигурном догађају функција *P* придружује број један.
3. Адитивност. Ако се случајни догађаји : *A1,A2,...* међусобно искључују , онда функција *P* придружује њиховој унији број који је једнак збиру бројева које функција *P* придружује догађајима: тј. *P(A1 + A2 + A3 + ...) = P(A1) + P(A2) + P(A3) + ...*

Потребно је навести још неке особине вероватноће:
1. Вероватноћа суротног догађаја једнака је: *P(A) = 1 - P(*A *).*
2. Вероватноћа немогућег догађаја једнака је нули.
3. Вероватноћа било ког случајног догађаја је број који се налази између *0 < P(A) < 1.*

Пракса намеће проблем налажења вероватноће догађаја *A*, ако се догађај *B* већ десио, и таква вероватноћа *P(A/B)* назива се условна вероватноћа

$$P(A/B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}.$$

Случајна променљива *X~* може се дефинисати као променљива која представља исход експеримента.

Ако са *X* ={*x1, x2, x3, ...*} означимо резултат експеримента, онда кажемо да променљива *X~* може узети једну вредност из скупа могућих разултата експеримента и то на случајан начин. Потребно је утврдити колико често, односно са којом вероватноћом променљива *X~* узима поједине вредности из датог скупа могућих вредности.

У пракси се посматрају две категорије случајних променљивих и то:
♦ дискретне и
♦ континуалне.

Променљива *X~* назива се случајна променљива дискретног типа ако вредности које она може узети образују коначан или пребројив низ реалних бројева {x1, x2 , x3 ,...}а узимање сваке од ових вредности је случајан догађај са одређеном вероватноћом.

За променљиву *X~* кажемо да је случајна променљива континуалног типа ако узимање било које вредности из интервала *(-∞;+∞)* представља случајан догађај и ако постоји функција *f(x)* таква да је вероватноћа да ће се *X* наћи у произвољно малој околини тачке *x* у
интервалу

$$\left[x - \frac{\Delta x}{2}; x + \frac{\Delta x}{2}\right].$$

48. Функција густине расподеле и функција расподеле

Функција *f(x)* назива се функција густине расподеле случајне променљиве *X~* . Функција густине *f(x)* мора да задовољи следећа два услова:

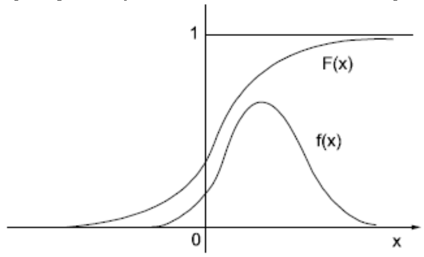
1. Вероватноће да се случајна променљива нађе у неком интервалу(x1, x2] је :

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \ .$$

2. У пракси је често потребан податак о вероватноћи да случајна променљива *X~* узме вредност не мању од *x*, при чему је *x* унапред одређен број из интервала *(-∞;+∞)*. Нпр. интересује нас догађај да ће у аутоматској телефонској централи број позива бити мањи од неког броја који представља капацитет централе.Та вероватноћа је:

P(*X* > *x*)= *1− P*(*X* > *x*).

Функција расподеле случајне променљиве X ~ је функција *F(x*) која за свако *x* из *(-∞;+∞)* представља вероватноћу да случајна променљива *X* неће узети вредност већу од *z*, тј. *F(x) = P(X<z).*



Слика П.1 Графички приказ функције густине расподеле и функције расподеле случајне променљиве

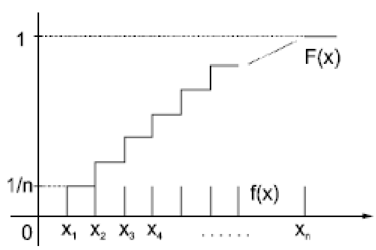
Функције расподеле окарактерисана је следећим особинама:

1. Функција расподеле има вредности између нула и један, тј. $0<F(z)<1$.
2. $F(-\infty)=0$.
3. $F(+\infty)=1$.
4. Функција *F(x)* је монотоно неопадајућа функција.
5. Код случајне променљиве *X~* дискретног типа функција расподеле *F(x)* је степенаста функција која у тачкама *x1 ,x2 ,x3 ,...* има скокове једнаке одговарајућим вероватноћама.
6. Ако је *X~* непрекидна случајна променљива функцијом густине расподеле, *f(x)*, тада је за свако

$$x \in (-\infty;+\infty) \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \ .$$

49. Дискретна и континуална униформна расподела

Дискретна униформна расподела случајне променљиве *X* може се графички представити на следећи начин:



Слика П.2 Функције расподеле и густине расподеле за униформну дискретну расподелу

Случајна променљива *X~* узима вредности из скупа {*x1 ,x2 ,..., xn* }. Вероватноћа да случајна променљива *X~* узима вредност *x i* је

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n} \quad i = 1,2,...,n$$

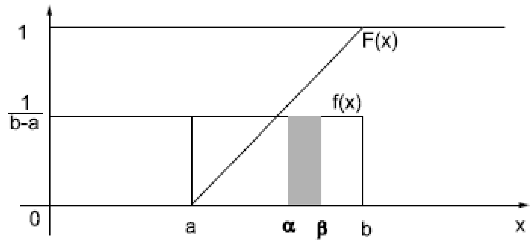
при чему је математичко очекивање

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

док је варијанса једнака

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

Континуална униформна расподела може се графички приказати на следећи начин:



Слика П.3 Функције расподеле и густине расподеле за униформну континуалну расподелу

где је $x \in X = [a, b]$ интервал у R, и

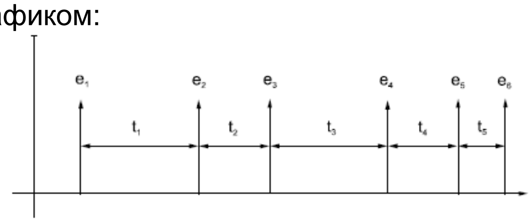
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x < b \\ 0 & \text{другачије} \end{cases}$$

Вероватноћа да ће се случајна променљива *X*~ наћи у интервалу {α,β} једнака је

$$P(\alpha \le x < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

50. Експоненцијална расподела

За представљање реалних појава као што су долазак купаца у самопослугу, појава телефонских позива, појава кварова на машини, и других система опслуживања, искуством је утврђено да је најпогоднији облик експоненцијална расподела. Догађаје у оквиру експоненцијалне расподеле можемо представити следећим графиком:



t_i- времена између два суседна догађаја

Сл. П.4 Догађаји са екпоненцијалном расподелом

За ову расподелу важе полазне претпоставке:

1. време наступања догађаја не зависи од претходног догађаја,
2. вероватноћа да догађај наступи у малом интервалу времена пропорцијална је дужини тог интервала:

$$P\left(\tilde{t} < t + \frac{\Delta t}{\tilde{t}} \geq t\right) = \frac{P\left(t \leq \tilde{t} < t + \Delta t\right)}{P\left(\tilde{t} \geq t\right)} = \frac{F\left(t + \Delta t\right) - F\left(t\right)}{1 - F\left(t\right)} = \lambda \cdot \Delta t$$

где је $P\left(\tilde{t} < t\right) = F\left(t\right)$ тражена расподела за $\tilde{t}$.

Ако $\Delta t \to 0 \Rightarrow F' = \lambda\left(1 - F\left(t\right)\right)$, $t \geq 0$ па је тражена расподела:

$$F\left(t\right) = \begin{Bmatrix} 1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0 \\ 0 \quad, t < 0 \end{Bmatrix}$$

док је функција густине расподеле:

$$f\left(t\right) = \begin{Bmatrix} \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0 \\ 0 \quad, t < 0 \end{Bmatrix}$$

Математичко очекивање параметара ове расподеле једнако је:

$$E\left(\tilde{t}\right) = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

Стандардна девијација је такође једнака $\frac{1}{\lambda}$.

51. Poisson-ова расподела

За случајну променљиву *X~* кажемо да има Poisson-ову расподелу ако може узети вредност *k* из низа ненегативних целих бројева *[0,1,2,3,...]* са вероватноћом

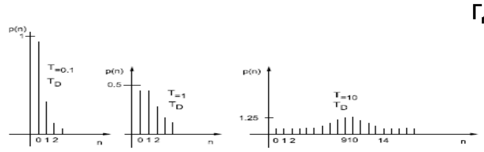
$$P\left(k\right) = P\left(X = k\right) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

при чему је λ>*0*, реалан број и представља параметар расподеле.

Ако интервали између два суседна догађаја (*t ~*) имају експоненцијалну расподелу, тада је вероватноћа да се *n* догађаја деси на интервалу *T* једнака

$$P\left(\tilde{n} = n\right) = \frac{\left(\lambda T\right)^n e^{-\lambda T}}{n!} \quad n = 0,1,2,...$$

где је *n~* број догађаја у јединици времена.



Слика П.5 Облици Poisson-ових расподела за различите односе

52. Нормална (Gauss-ова) расподела:

Користи се за представљање стохастичких појава уношењем шума у детерминистичке променљиве. Дефинисана је са 2 параметра:

- ♦ μ - средња вредност
- ♦ σ - стандардна девијација

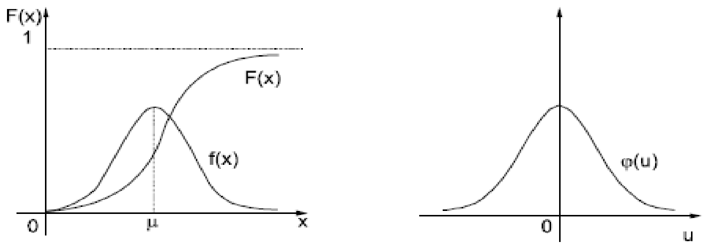
$$P(x < X) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{u} (\xi) d\xi$$

Ф-ја стандардизоване. нормалне расподеле за коју важи да је μ=*0* и σ=*1* има облик:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \qquad \left(z = \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Графички облик функције расподеле и функције густине расподеле за нормалну расподелу:



Слика П.6 Нормална расподела

На другом графикону је стандардизована нормална расподела са вредностима μ=*0* и σ=*1*.

53. Генерисање случајних бројева

У току спецификације стохастичких модела за променљиве које описују промену времена, улаза и стања, дефинишу се статистичке расподеле које их описују са најмањом грешком у односу на реални систем. При симулацији тако дефинисаних модела јавља се потреба за рачунарским алгоритмима који ће генерисати случајне променљиве за описивање промена времена и стања у моделу са неком задатом расподелом.

У статистичкој теорији се доказује да је случајну променљиву са задатом расподелом могуће генерисати на основу једне или више независних случајних променљивих са униформном расподелом.На тај начин се проблем своди на генерисање случајне променљиве са униформном расподелом.

Случајну променљиву са униформном расподелом могуће је добити једном од следећих метода:
♦ мануелне методе,
♦ табеле случајних бројева,
♦ методе за рад са аналогним рачунарима и
♦ методе за рад са дигиталним рачунарима.

Мануелне методе су малог опсега и због тога су непримењљиве у симулацији. Евентуално се могу користити за обучавање кадрова. У ове методе спадају: извачење бројева из кутије, бацање коцкица итд.

Табеле случајних бројева су серије случајних бројева (СБ) који се производе на погодан начин, помоћу неког физичког извора или неком од метода извлачења бројева. Највећа до сада публикована табела случајних бројева, садржи 1.000.000 цифара Бројеви су добијени на следећи начин. Био је конструисан специјалан рулет који се покретао и заустављао уз помоћ електронике. Покретни диск се нагло заустављао и бирала се цифра коју је показивала стрелица. Овако добијене цифре се скупљају у четвороцифрене или петоцифрене бројеве и уносе у табелу случајних бројева. Иако овакав поступак поседује сва својства случајности, ипак су се после дужег времена почеле да добијају цифре које, према провери статистичким тестом, нису имале равномерну расподелу.

Методе за генерисање СБ на аналогном рачунару се базирају на коришћењу случајних физичких процеса који се одвијају у аналогном рачунару и дају "праве случајне бројеве". Неподесне су за рад, јер у случају поновљене симулације са истим редоследом случајних бројева, физички процес даје нове случајне бројеве

Методе за генерисње СБ на дигиталном рачунару базирају се на следећим поступцима:
1. Коришћење физичких извора + A/D конверзија,
2. Коришћење табела случајних бројева на дисковима рачунара,
3. Коришћење алгоритама за добијање псеудослучајних бројева.

Коришћење физичких извора (бели шум, радиоктивни распад) и конверзија физичких величина у дигиталне је скуп и неприступачан процес за свакодневну примену.

Табеле случајних бројева на масовним меморијама рачунара су добар али спор начин за добијање случајних бројева при симулацијама сасвим просечних система који у току симулације траже неколико милиона случајних бројева.

Алгоритми за генерисање псеудослучајних бројева су брз начин за генерисање случајних бројева. Међутим квалитет таквих генератора зависи од алгоритма и рачунара на коме се имплементира. Дужина секвенце бројева без понављања је ограничена а униформност и резолуција може да буде променљива. Због тога је потребно пре употребе оваквих генератора испитати и утврдити да ли одговарају захтевима модела.

Данас су претежно у употреби овакви генератори.

54. Линеарни конгруентни ГСБ

Конгруентни бројеви су такви бројеви који су међусобно дељиви без остатка.Користећи особине конгруентних бројева, можемо дефинисати следеће врсте линеарних конгруентних генератора псеудо-случајних бројева са униформном расподелом:

1. Мултипликативни $Z_i = (Z_{i-1} \cdot a) \bmod m$
2. Мешовити $Z_i = (Z_{i-1} \cdot a + c) \bmod m$
3. Адитивни $Z_i = (Z_{i-1} \cdot a + Z_{i-k} \cdot b) \bmod m$

где су:

Z_i - псеудо случајни број,
Z_0 - почетна вредност или семе генератора,
a - мултипликатор,
b - константа,
c – константа
m - модулус.

Од наведених генератора, највише је у употреби линеарни мултипликативни конгруентни генератор псеудослучајних бројева. Линеарни млтипликативни конгруентни генератор случајних бројева генерише случајне бројеве по следећој формули:

$$Z_i = (a * Z_{i-1} + b) \mod m$$
$$m = 2^{b-1}$$

где су :

Z_i - псеудослучајни број,

Z_0 - почетна вредност (семе) секвенце псеудо случајних бројева,

a - мултипликатор,

b - број битова целобројне променљиве у рачунару.

Доказује се да је максимална могућа дужина низа генерисаних бројева, без понављања *Nmax = m - 1.* Да би се постигло максимално могуће *Nmax*, *a* и *Z0* треба да испуњавају следеће услове

$$a = 8 \cdot j \pm 3 \qquad j = 1,2,3,...$$
$$Z_0 = 1,3,5,7,...$$

тада је

$$\frac{m}{4} \le N_{max} \le m - 1$$

55. Тестови за проверу ГСБ

Псеудослучајни бројеви добијени из генератора случајних бројева треба да задовоље особине које се односе на униформност расподеле унутар интервала *(0,1)* и независност појавлљивиања. Наиме, иако је генерисање бројева линеарним конгруентним генераторима строго детерминистички алгоритам, генерисани бројеви морају да задовоље одређене статистичке тестове и тада се сматрају случајним.

***к*-тест:**

за испитивање да ли неки скуп генерисаних случајних бројева има претпостављени распоред. Неки скуп од *n* елемената (случајних бројева) може се груписати према некој особини у *r* група. Нека се у *i*-тој групи нађе *fi* елемената тако да је $f_1 + f_2 + ... + f_r = n$.
Вероватноћа да ће се елеменат *x* наћи у групи *f i* је *p i* а број елемената који према теоријској расподели треба да се нађу у *i*-том интервалу износи *np i* .

Да би претпоставка *(H0)* да дати скуп подлеже одређеној расподели била у важност, треба да се нађе вредност израза $2\ (f_i\ - np_i)$ и да се упореди са вредношћу к која се налази у таблицама за *r-1* степене слободе и за вероватноћу која одговара задатом нивоу значајности. *k*< *k0* скуп подлеже претпостављеној расподели, тј усваја се хипотеза H0, у супротном се хипотеза одбацује.

Колмогоров-Смирнов тест:

омогућава поређење да ли испитивани скуп случајних бројева подлеже претпостављеној расподели. Нека је генерисано *n* случајних бројева. Треба прво обавити њихово сређивање по величини: $x_1 < x_2 < ... < x_n$.

Код униформне расподеле, вероватноћа појављивања сваког од њих износи *1/n.* Кумулативна функција расподеле може се конструисати на тај начин што ће код сваког *x* доћи до пораста функције за *1/n.*

Пошто је кумулативна функција униформне расподеле *Fn (x)* позната, то се може израчунати изразом

$$D_n = \max_{-\infty < z < \infty} \left| F(z) - F_e(z) \right|$$

Уколико је *Dn(x)* мање од критичне вредности *d0* за праг значајности α*,* нулта хипотеза (хипотеза да се ради о униформној расподели) биће прихваћена.

Предност над k-тестом - могу се тестирати мали скупови бројева. Међутим, потреба да се бројеви среде по редоследу захтева доста меморијског простора, јер је број генерисаних бројева обично врло велики.

Други тестови (ређе се користе): покер тест, тест серије истих цифара, интервални тест и тестови корелације.

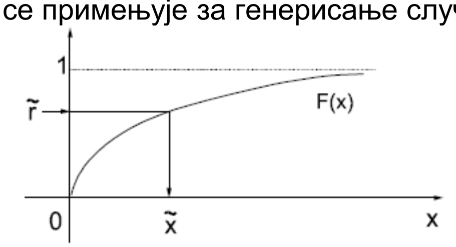
56. Метода инверзне трансформације

Уводи се смена $\tilde{X} = h(\tilde{r})$ таква да случајној променљивој $\tilde{X}$ одговара жељена функција расподеле *F(X).*

$$F(X) = P\left(\tilde{X} < X\right) = P(\tilde{r} < r) = P\left(\tilde{r} < h^{-1}(X)\right) = U\left(h^{-1}(X)\right) = h^{-1}(X)$$

$$h(\tilde{r}) = F^{-1}(\tilde{r})$$

Примена ове методе ограничена је на функције расподеле које имају инверзну функцију и монотоне су. Углавном се примењује за генерисање случајних променљивих са експоненцијалном расподелом.



Слика П.7 Графички приказ методе инверзне трансформације

57. Метода одбацивања

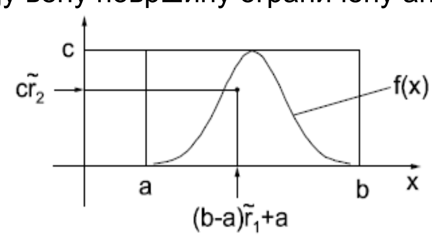
Услов за примену ове методе је ограничен опсег дефинисаностифункције густине расподеле.
$f(X) \approx 0 \;\; za \;\; X \notin [a,b]$

Ако се на површини (*b-a)*c* генерише низ тачака са униформном расподелом и ако се одбаце све тачке које падају изнад криве *f(X)* преостале тачке имаће функцију густине расподеле *f(X).*

Алгоритам :

REPEAT
    генериши r_1 i r_2 ;
    $X_1 := (b-a) * r_1 + a$;
UNTIL $r_2 * c \leq f(X_1)$
$X := X_1$

С обзиром на то да се приликом сваког промашаја наново генеришу случајни бројеви са униформном расподелом, као то се троши извесно рачунарско време, за примену ове методе погодније су расподеле које имају већу површину ограничену апсцисом и кривом функције расподеле.



Слика П.8 Графички приказ методе одбацивања

58. Метода правоугаоне апроксимације

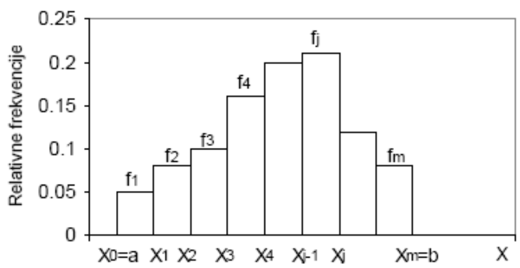
Користи се за генерисање емпиријских расподела, када је функција расподеле монотона и задата паровима тачака.

Код многих реалних проблема, вероватноћа да ће се десити догађај изражава се у виду емпиријских података. Ти подаци се могу груписати у произвољан број фреквенцијских класа (*m*) које сачињавају хистограм.

Свака класа је представљена правоугаоником чија се доња и горња граница могу означити са *Xj-1, Xj, j=1,2,...,m*. Укупан број реализација случајне променљиве у оквиру једне класе се назива апсолутна фреквенција и означава се са *nj, j=1,2,...,m* .

Релативна фреквенција сваке класе, $f_j = 1/n_j$ представља вероватноћу да ће реализација случајне променљиве *X~* узети вредност из класе *j:*

$$X_{j-1} \le \tilde{X} \le X_j$$



Слика П.9 Хистограм расподеле релативних фреквенција

Збир релативних фреквенција је једнак јединици $\sum_{j=1}^{m} f_j = 1$

На основу хистограма се конструише функција расподеле, при чему је потребно израчунати кумулативну суму претходних фреквенција *Yj* :

$$\begin{aligned} Y_1 &= f_1 \\ Y_2 &= f_1 + f_2 \\ &\vdots \\ Y_j &= f_1 + f_2 + \cdots + f_j \\ &\vdots \\ Y_m &= f_1 + f_2 + \cdots + f_m = 1 \end{aligned}$$

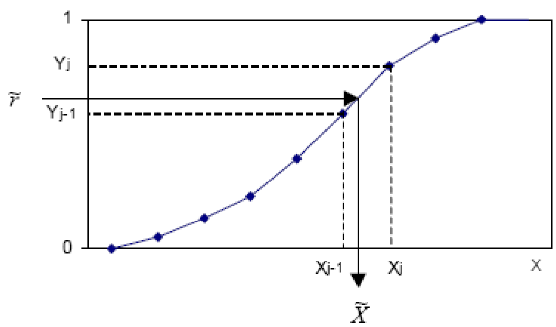
Yj представља вероватноћу да случајна вредност $\tilde{X}$ не прелази вредност *Xj*.

Да би омогућили примену методе инверзне трансформације, потребно је апроксимативно одредити функцију расподеле, тако што се кроз кумулативни хистограм провлачи континуална крива повлачењем сегмената правих линија:

Слика П.10 Кумулативна сума релативних фреквенција

За добијање одговарајуће вредности $\tilde{X}$ потребно је генерисати униформно расподељен случајни број $\tilde{r} \in [0,1)$ и користити једначину за линеарну интерполацију:

$$\tilde{X} = X_{j-1} + \left(\frac{\tilde{r} - Y_{j-1}}{Y_j - Y_{j-1}}\right) \cdot (X_j - X_{j-1})$$



Слика П.11 Линеарна апроксимација функције расподеле

Једини преостали проблем јесте одређивање класе која одговара случајној величини $\tilde{r}$. То се може решити одговарајућим претраживањем, стартујући од крајње леве класе (т.ј. *j=1*) и сукцесивним поређењем вредности $\tilde{r}$ са вредностима *Yj*. Тражена класа је прва класа за коју је $\tilde{r} \le Y_j$.

При имплементацији ове методе на рачунару морају бити познате следеће вредности: доња и горња граница апцисе функције расподеле (*a=X0,b=Xm*), као и вредности кумулативних фреквенција *Yj* . Када су класе једнаких ширина, њихове границе се рачунају на следећи начин:

$$X_{j-1} = a + \left(\frac{b-a}{m}\right) \cdot (j-1)$$

$$X_j = a + \left(\frac{b-a}{m}\right) \cdot j$$

Уколико класе хистограма нису једнаке ширине, потребно је поред поменутих вредности учитати и границе свих класа *Xj, j=0,1,...,m.*

Горње једначине се могу модификовати у следећим случајевима:

1. Уколико је функција расподеле задата аналитички, а потребно је "припремити" исту као улаз у неки од симулационих програма, тада је могуће извршити поделу вредности функције расподеле на једнаке интервале, за које је потребно израчунати вредности
Xi, i=1,2,...,n..

2. Ако је пожељно изједначити вредности фреквенција класа у хистограму, тада је потребно формирати класе различитих ширина. У том случају су вредности функције расподеле, које одговарају границама класа, на једнаким растојањима.

3. Када се захтева ефикаснији алгоритам за претраживање, при чему грешка апроксимације није критична, могуће је извршити поделу вредности функције расподеле (*Y*) на једнаке интервале, за које је потребно израчунати вредности *X.*

У наведеним случајевима, могуће је користити следећи алгоритам, који је ефикаснији у рачунском смислу:

генериши $\tilde{r}$;

$$i := INT\left(\frac{\tilde{r}}{\Delta Y}\right)$$

$$\tilde{X} := X_i + A_i * (\tilde{r} - i * \Delta Y)$$

где је:

$$A_i := \frac{X_{i+1} - X_i}{\Delta Y}$$

$$\Delta Y := \frac{1}{m}$$

59. Метода сумирања

Користи се за генерисање Нормалне (Gauss-ове) расподеле. Заснива се на примени централне граничне теореме:

Централна гранична теорема

-Нека је $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, ..., \tilde{X}_n$ низ независних случајних променљивих са једнаким вероватноћама, свака са средњом вредношћу μ_x и коначном варијансом σ_x^2 *.* Њихова средња вредност дата је следећим изразом:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i$$

-Тада променљива

$$Y = \frac{(\overline{X} - \mu_x)}{\sigma_x / \sqrt{n}}$$

конвергира ка стандардној нормалној расподели са средњом вредношћу μ и стандардном девијацијом $\sigma/\sqrt{n}$, тј. за довољно велико *n* разлика између променљиве *Y* и стандардизоване нормалне променљиве може се занемарити из практичних разлога.

-да би генерисали узорак из стандардне нормалне расподеле, можемо узети *n* независних униформно расподељених случајних бројева $\tilde{r}_i \in [0,1)$ са средњом вредношћу $E(\tilde{r}_i) = 1/2$

Варијансом $E(\tilde{r}_i - \mu)^2 = 1/12$. Случајна променљива:

$$Z = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{r}_i - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{12}}\Big/\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\tilde{r}_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}}$$

има нормалну расподелу са средњом вредношћу нула и варијансом један

$$(E(Z) = 0 \, , E(Z - \mu)^2 = 1)$$

Када $n \to \infty$.Задовољавајући резултати апроксимације добијају се за *n=12* у ком случају горња једначина постаје:

$$Z = \sum_{i=1}^{12}\tilde{r}_i - 6$$

Уколико је потребно генерисати узорке из нестандардизоване нормалне расподеле, потребно је користити следећи израз: $X = \mu + \sigma \cdot Z$

60. Box-Muller-ов метод

Box-Muller-ов метод је егзактан метод који користи две независне псеудо-случајне променљиве *r1* и *r2* које се користе за генерисање стандардизованих нормално расподељених случајних променљивих коришћењем оба или једног од следећих израза:

$$Z_1 = cos(2\pi \cdot r_1)\sqrt{-2\ell n(r_2)}$$

$$Z_2 = sin(2\pi \cdot r_1)\sqrt{-2\ell n(r_2)}$$

Уколико је потребно генерисати узорке из нестандардизоване нормалне расподеле, потребно је користити следећи израз:

$$X = \mu + \sigma \cdot Z$$

Код методе сумирања потребно је за свако *Z* имати на располагању 12 различитих вредности $\tilde{r}_i$, док су код Box-Muller-ове методе потребне само две такве вредности. Међутим, овај метод захтева израчунавање квадратног корена, логаритма, косинусне или синусне функције, што захтева више рачунарског времена него што је потребно за одређивање једноставне суме. Такође, тачност резултата зависи и од уграђених функција (библиотечких подпрограма) за израчунавање квадратног корена, логаритма, као и синусне и косинусне функције.